CEVAP ANAHTARI

Adı-Soyadı: **19.11.2019**
Numarası:

Fen – Edb. Fak. Mat. Bölümü Diferansiyel Geometri I Arasınav Soruları

1. E^2 de $S=\left\{P_0=(0,0),\ P_1=(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}),\ P_2=(-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}})\right\}$ nokta sisteminin Öklid çatısı olduğunu gösteriniz. $P=(3,2)\in E^2$ noktasının S çatısına göre koordinatlarını bulunuz.

2.

a. $\vec{v}=(1,0,2),\ \vec{u}=(-1,3,1)\in IR^3$ için $3\vec{v}_p-2\vec{u}_p$ tanjant vektörünü hesaplayınız.

b. $X,Y\in\chi(E^2)$ vektör alanları $X=x_1\frac{\partial}{\partial x_1}-x_2\frac{\partial}{\partial x_2},\ Y=x_2{}^3\frac{\partial}{\partial x_2}$ şeklinde veriliyor. $P=(1,2)\in E^2$ noktasında $X-x_1Y$ vektör alanının değerini bulunuz. şeklini çiziniz.

3. $\left\{dx_1|_p, dx_2|_p,\ldots,dx_n|_p\right\}$ kümesinin $T^*_{E^n}(P)$ kotanjant uzayının bir bazı olduğunu gösteriniz. Burada, $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$, E^n de Öklid koordinat sistemidir.

4. Divergens fonksiyonu tanımlayınız. Lineer olduğunu gösteriniz.

5. $\alpha: I\to E^3$, $\alpha(t)=(2\cos^2 t,\ \sin 2t,\ 2\sin t)$ eğrisinin t parametresinin yay parametresi olmadığını gösteriniz. $t=\frac{\pi}{4}$ noktasındaki hız vektörünü bulunuz

NOT: Sorular eşit puanlı olup süre 90 dakikadır.

Başarılar
Prof. Dr. Emin KASAP

1– P_0, P_1 ve P_2 noktaları yardımıyla

$$\vec{P_0P_1}=P_1-P_0=(2/\sqrt{5},\ 1/\sqrt{5})$$
$$\vec{P_0P_2}=P_2-P_0=(-1/\sqrt{5},\ 2/\sqrt{5})$$ olmak üzere

$\{\vec{P_0P_1}, \vec{P_0P_2}\}$ vektör sistemini ele alalım:

- $\langle \vec{P_0P_1}, \vec{P_0P_1}\rangle = \langle (2/\sqrt{5},\ 1/\sqrt{5}), (2/\sqrt{5},\ 1/\sqrt{5})\rangle$
$$=\frac{4}{5}+\frac{1}{5}$$
$$=1.$$

- $< \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_2} > = < (-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}), (-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}) >$

$$= \frac{1}{5} + \frac{4}{5}$$

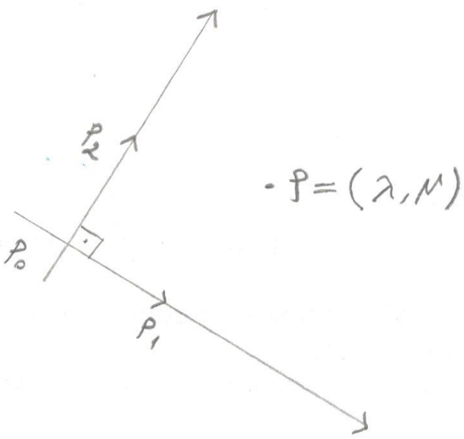
$$= 1 .$$

- $< \overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2} > = < (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}), (-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}) >$

$$= \frac{-2}{5} + \frac{2}{5}$$

$$= 0.$$

O halde; $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}\}$ sistemi $\mathbb{R}^2$ nin bir ortonormal baz olup $\{P_0, P_1, P_2\}$ nokta üçlüsü bir Öklid çatısı belirtir.



$P = \lambda \overrightarrow{P_0P_1} + \mu \overrightarrow{P_0P_2}$ olacak şekildeki λ, μ sayıları P noktasının $\{P_0, P_1, P_2\}$ Öklid çatısına karşılık gelen Öklid koordinat sistemindeki koordinatlarıdır.

$$\Rightarrow (3,2) = \lambda (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}) + \mu (-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\lambda - \mu = 3\sqrt{5} \\ \lambda + 2\mu = 2\sqrt{5} \end{cases}$$

$\Rightarrow \lambda = 8/\sqrt{5}$, $\mu = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ elde edilir.

2- a) $P \in \mathbb{R}^3$ için

$$3\vec{V}_P = 3(P, \vec{v}) = (P, 3\vec{v}) = (3,0,6)|_P$$

$$-2\vec{U}_P = (-2)(P, \vec{u}) = (P, (-2\vec{u})) = (2,-6,-2)|_P$$ olmak üzere

$$3\vec{V}_P - 2\vec{U}_P = (5,-6,4)_P \in T_{\mathbb{R}^3}(P)$$ elde edilir.

b) $(X - x_1 Y)(P)$ değerini hesaplaydım:

$$(X - x_1 Y)(P) = X(P) - x_1(P)\, Y(P)$$

$$= \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)(P) - x_1(P)\left(x_2^3 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)(P)$$

$P = (1,2) \in E^2$ için

$x_1(P) = P_1 = 1$

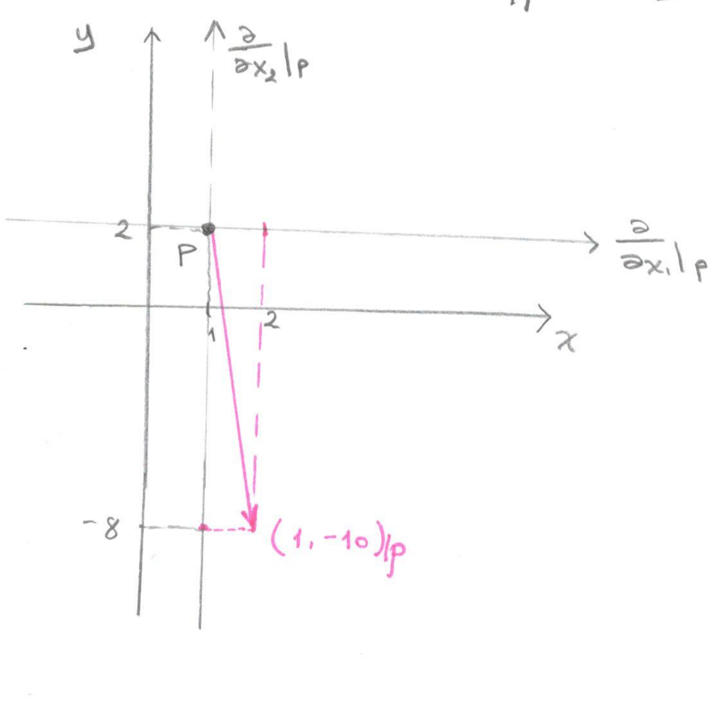
$x_2(P) = P_2 = 2$ dir.

$$= x_1(P)\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_P - x_2(P)\frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_P - x_1(P)\, x_2^3(P)\frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_P$$

$$= 1 \cdot \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_P - 2\frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_P - 1 \cdot 2^3 \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_P$$

$$= 1\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_P - 10\frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_P$$

$$= (1,-10)|_P \in T_{E^2}(P)$$ bulunur.



3- $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_P , \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_P , \ldots , \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_P \right\}$ kümesinin $T_{E^n}(P)$ nin baz olduğunu biliyoruz.

$dx_i|_P \in T^*_{E^n}(P)$, $1 \leq i \leq n$ olmak üzere

$\{ dx_1|_P , dx_2|_P , \ldots , dx_n|_P \}$ kümesi verilsin.

$$dx_i|_P \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_P \right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_P [x_i] = \frac{\partial x_i}{\partial x_j}\Big|_P$$
$$= \delta_{ij}$$

olduğundan dual baz tanımı gereğince

$$\{ dx_1|_P , dx_2|_P , \ldots , dx_n|_P \}$$

kümesi $T^*_{E^n}(P)$ kotanjant uzayının bazıdır.

4- Divergens Fonksiyonu: $X = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \chi(E^n)$

$f_i \in C(E^n, \mathbb{R})$, $1 \leq i \leq n$ olmak üzere

$$div : \chi(E^n) \longrightarrow C(E^n, \mathbb{R})$$
$$X \longrightarrow div(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$$

fonksiyonuna divergens fonksiyonu denir.

$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ için

$$div(X) = \langle \nabla, X \rangle \text{ dir.}$$

Divergens fonksiyonu lineerdir.?

$\forall X, Y \in \chi(E^n)$ ve $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için

$$div(aX+bY) = a\,div(X) + b\,div(Y)$$

olduğunu göstermeliyiz.

$X = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ve $Y = \sum_{i=1}^{n} g_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ olsun. Buradan,

$$aX + bY = \sum_{i=1}^{n} (af_i + bg_i) \frac{\partial}{\partial x_i}$$ olur.

$$div(aX+bY) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (af_i + bg_i)}{\partial x_i}$$

Kısmi türev lineer

$$= a \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + b \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_i}$$

$$= a\, div(X) + b\, div(Y)$$ bulunur.

5- $\alpha : I \longrightarrow E^3$
$t \longrightarrow \alpha(t) = (2\cos^2 t, \sin 2t, 2\sin t)$ için

$$\alpha'(t) = (\underbrace{-4\cos t \sin t}_{-2\sin 2t}, 2\cos 2t, 2\cos t)$$ dır.

$$\Rightarrow \|\alpha'(t)\| = \sqrt{4\sin^2 2t + 4\cos^2 2t + 4\cos^2 t}$$

$$= \sqrt{4 + 4\cos^2 t} = 2\sqrt{1+\cos^2 t}$$ elde edilir ki

$\forall t \in I$ için $\|\alpha'(t)\| = 1$ olmak zorunda değildir. Örneğin;

$\exists\, t=0$ için $\|\alpha'(0)\| = 2\sqrt{2} \neq 1$ dir. Ayrıca; $t = \frac{\pi}{4}$ için

$$\alpha'(\tfrac{\pi}{4}) = (-2, 0, \sqrt{2})$$ bulunur.